

## ВІДЗИВ

офіційного опонента доктора фізико-математичних наук, професора, професора кафедри моделювання складних систем Київського національного університета

імені Тараса Шевченка

ХУСАІНОВА Дениса Яхьєвича

на дисертацію Візінської Ірини Іванівни «Апроксимація початкових і крайових задач для диференціально функціональних рівнянь та їх числове моделювання», поданої на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – «Прикладна математика»

**Актуальність теми.** Теорія диференціально-функціональних рівнянь – важливий розділ сучасної математики, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням у механіці, радіофізиці, біології, математичній економіці та ін. Відзначимо значну кількість прикладних робіт з екології, імунології, економіки, в яких відхилення аргументу є істотним елементом математичної моделі. Поряд з властивостями, які характерні для звичайних диференціальних рівнянь, такі рівняння мають також специфічні властивості, які відсутні у відповідних диференціальних рівнянь. По суті, це диференціальні рівняння у нескінченновимірному банаховому просторі. Тому розвиток методів дослідження диференціально-функціональних рівнянь, вивчення властивостей їх розв'язків, зокрема, що обумовлені наявністю відхилення аргументу, має велике теоретичне і практичне значення.

Це, зокрема, стосується аналізу початкових та крайових задач із запізненням та нейтрального типу, а саме дослідженню гладкості розв'язків та визначенню функціональних просторів яким вони належать залежно від структури відхилень аргументу; встановленню умов існування розв'язків таких задач тощо. Слід відзначити, що аналітичний розв'язок початкових та крайових задач для диференціально-різницевого та інтегро-диференціальних рівнянь аналітичними методами вдається отримати у виключних ситуаціях. Таким чином проблема створення ефективних наближених методів розв'язку цих задач

і розробка їх програмної реалізації сучасними обчислювальними засобами є особливо актуальною.

Важливою також є задача дослідження стійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь. У зв'язку з багаточисельними прикладними застосуваннями значна увага приділяється одержанню умов стійкості для лінійних диференціальних рівнянь із запізненням. Особливий інтерес викликають дослідження, що дозволяють використати існуючі методи теорії звичайних диференціальних рівнянь. Ці питання, які є основним об'єктом дослідження даної дисертаційної роботи, мають важливе значення для подальшого розвитку теорії диференціально-функціональних рівнянь в цілому, і в силу цього тема дисертаційної роботи є важливою і актуальною.

**Основні результати роботи.** Дисертаційна робота І.І. Візінської складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних літературних джерел (104 найменування) та трьох додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і завдання дослідження, розкрито наукову новизну, теоретичне і практичне значення одержаних результатів, а також наведено інформацію про особистий внесок здобувача і апробацію отриманих ним результатів.

Досить детальний огляд робіт, що є близькими до теми дисертації та методичний аналіз методів розв'язання досліджуваних в роботі задач, наведено у першому розділі дисертаційної роботи. Відзначимо детальний аналіз робіт стосовно історичної хронології досліджень схем апроксимації диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь, її сучасний стан та можливі напрямки застосування.

У другому розділі дисертаційної роботи розглянуто схему наближення елемента із запізненням для різних його вхідних функцій, яка в подальшому використовується для обґрунтування схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь. У цьому ж розділі обґрунтовується можливість застосування схем апроксимації для наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь. Цікавою та



важливою для застосувань є наведена і обґрунтована схема апроксимації підвищеної точності, ефективність якої продемонстрована на тестових модельних прикладах. Розроблені алгоритми знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів дозволяють вивчати задачу про стійкість лінійних диференціально-різницевих рівнянь та розглянути вплив величини запізнення на стійкість таких рівнянь. Цікавим результатом другого розділу є знаходження, за допомогою методу  $D$  - розбиття, точного значення верхньої межі запізнення для якої зберігається стійкість у скалярного модельного рівняння із одним запізненням.

Нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням вивчаються у третьому розділі дисертації. На думку автора, основні складності тут полягають у визначенні функціонального простору якому належить розв'язок задачі та застосування принципу стислих відображень для доведення існування та єдиності розв'язку у цих просторах. Наявність інтегрального доданку у рівнянні не тільки ускладнює технічні викладки, а істотно змінює практичну реалізацію схем знаходження наближених розв'язків відповідних крайових задач. Для обґрунтування точності апроксимації загальної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма сталими запізненнями встановлено оцінку точності апроксимації елемента запізнення у випадку кусково неперервних вхідних функцій.

У четвертому розділі розглянуто застосування схем апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь для знаходження неасимптотичних коренів відповідних квазіполіномів. Це дозволяє вивчати ряд важливих для практичних застосувань задач, що стосуються стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями. Дослідження цих задач зводиться до аналізу умов від'ємності дійсних частин усіх нулів відповідних квазіполіномів обчислюючи корені характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Відзначимо розроблене автором роботи прикладне програмне забезпечення для реалізації запропонованих в роботі алгоритмів, опис якого наведений в

підрозділі 4.2. Для його розробки використані сучасні інформаційні технології, забезпечено зручний користувацький інтерфейс.

**Наукова новизна, оцінка обґрунтованості наукових положень дисертації та їх достовірності.**

Дисертація містить ряд нових цікавих результатів, що розв'язують важливі проблеми щодо побудови та обґрунтування схем апроксимації початкових і крайових задач для систем диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого й нейтрального типів та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

Запропоновано алгоритми дослідження на стійкість систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями та знаходження верхньої межі запізнення, для якої зберігається стійкість системи із запізненням і розроблено прикладні додатки для їх реалізації на тестових модельних прикладах.

Дисертаційна робота Візінської І.І. має чітку та логічну структуру і є цілісним та завершеним науковим дослідженням.

Усі результати дисертаційної роботи сформульовані у вигляді теорем і лем, які супроводжуються строгими і повними доведеннями, що підтверджується наведеними в роботі прикладами та забезпечується узгодженістю з відомими раніше результатами. Доведені в дисертації теореми та запропоновані алгоритми аналізу стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями суттєво доповнюють створену на цей час теорію диференціально-функціональних рівнянь в цілому.

**Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.** Дисертація є теоретичним дослідженням. Результати отримані в дисертації є конструктивними, сприятимуть подальшому розвитку теорії початкових і крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь і можуть бути використані при дослідженні задач теорії керування, біології, екології, економіки та інших галузей науки і техніки, математичними моделями яких є такі рівняння.

**Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях.**



Результати дисертації достатньо повно опубліковані у 5 наукових статтях, з яких 4 статті належать до переліку наукових видань України категорії "Б", а одна стаття входить до переліку наукових видань України категорії "А". Наукові результати апробовані в матеріалах 11 всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій з яких 2 належать до міжнародної наукометричної бази "Scopus". У дисертації для опублікованих у співавторстві робіт визначено особистий внесок дисертанта.

Дисертація відповідає встановленим вимогам щодо кількості публікацій за темою дисертації у фахових виданнях, а також щодо об'єму та оформлення дисертаційних робіт.

#### **Зауваження і побажання.**

1. У правій частині формули (2.58) на сторінці 58 допущена технічна описка. Замість  $\frac{\tau(m-K)}{m}$  повинно бути  $\frac{\tau(m-i)}{m}$ .

2. При побудові множини  $E$  в п 3.1.1, що пов'язана із відхиленнями аргумента  $\tau_i(x)$ , доцільно було б детальніше акцентувати увагу чому в точках цієї множини друга похідна розв'язку взагалі кажучи може бути розривною.

3. У розділі 4 доцільно було б описати методику застосування процедури roots із бібліотеки NumPy для знаходження коренів многочленів високого степеня.

4. Цікаво було б розглянути можливість поширення схем апроксимації початкових та крайових задач для систем диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого типу на крайові задачі змішаного типу (mixed type), що містять, наприклад, одночасно і запізнення і випередження. На даний час для таких задач нема поширених алгоритмів знаходження розв'язків.

Відзначимо, що зазначені зауваження та побажання не мають принципового значення і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації.

#### **Висновок про відповідність дисертації встановленим вимогам.**

Оцінюючи дисертаційну роботу в цілому, є всі підстави стверджувати, що за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень і науковою новизною та

цінністю одержаних в ній результатів і науково-теоретичним рівнем їх обґрунтованості дисертаційна робота Візінської Ірини Іванівни на тему «Апроксимація початкових і крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь та їх числове моделювання», подана на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – «Прикладна математика» в галузі знань 11 – «Математика та статистика» відповідає вимогам пунктів 6, 7, 8, 9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. №44 (із змінами внесеними згідно з Постановою Кабінету Міністрів України від 21 березня 2022 р. №431), а її автор Візінська Ірина Іванівна заслуговує на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – «Прикладна математика» в галузі знань 11 – «Математика та статистика».

Офіційний опонент,  
доктор фізико-математичних наук, професор  
професор кафедри моделювання складних систем  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка



Денис ХУСАІНОВ

Підпис засідання  
Рішення Секретар НДА  
Караульча І.В.  
20.11.2023р

