

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича



ЗАТВЕРДЖУЮ

Голова приймальної комісії

Роман ПЕТРИШИН

«29» травня 2023 року

**ПРОГРАМА ВСТУПНОГО ІСПИТУ
ДО АСПІРАНТУРИ**

для здобуття наукового ступеня доктора філософії
зі спеціальності
111 Математика

Чернівці - 2023

Математичний аналіз

1. Функції однієї змінної: границя функції в точці; дослідження локальної поведінки функції; неперервні функції та їх основні властивості. Обернена функція та умови її існування.
2. Похідна та її застосування: означення та правила обчислення похідних; теореми про функції, що мають похідну; диференціал функції; похідні та диференціали старших порядків; формула Тейлора; дослідження функцій на екстремум.
3. Невизначений інтеграл: означення, властивості та методи інтегрування.
4. Визначений інтеграл: означення, основні властивості.
5. Числові ряди: означення збіжності; критерій Коші; критерій та ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами; абсолютно і умовно збіжні ряди.
6. Функціональні ряди: означення, критерій та ознаки рівномірної збіжності; властивості рівномірно збіжних рядів; почленне інтегрування та диференціювання; степеневі ряди та їх основні властивості; розклад елементарних функцій у степеневі ряди.
7. Функції кількох змінних: границя в точці; неперервність; властивості неперервних функцій на компактах; частинні похідні; диференційовність; формула Тейлора; дослідження на екстремум; градієнт, похідна за напрямом; теорема про існування неявної функції.
8. Невласні інтеграли: означення, властивості, ознаки збіжності; рівномірна збіжність невластних інтегралів, залежних від параметра; властивості функцій, що визначаються невластними інтегралами (інтеграли, що залежать від параметра: неперервність, диференціювання та інтегрування по параметру).
9. Кратні інтеграли: означення, властивості, обчислення; невластні кратні інтеграли.
10. Криволінійні та поверхневі інтеграли: означення, властивості, обчислення; формули Гріна, Гауса-Остроградського і Стокса.
11. Ряди та інтеграл Фур'є: означення, властивості рядів Фур'є відносно ортонормованих систем функцій; ознаки збіжності тригонометричних рядів Фур'є; розклад функцій в тригонометричні ряди Фур'є; інтегральна формула Фур'є, перетворення Фур'є.

Лінійна алгебра

1. Лінійні простори: означення, лінійна незалежність, базис, розмірність; евклідові та унітарні скінченновимірні простори; приклади.

2. Лінійні оператори у скінченновимірних просторах: означення, матричний опис; ядро і образ, ранг і дефект; простір лінійних операторів.
3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: необхідна та достатня умова розв'язності (теорема Кронекера - Капеллі); теорема про структуру розв'язків. Формула для обчислення оберненої матриці.
4. Канонічна форма матриці лінійного оператора: жорданова форма матриці; знаходження функцій від оператора; теорема Гамільтона – Келі.
5. Спектральна теорія самоспряжених операторів: білінійна та квадратична форми оператора; теорема про існування спряженого оператора; самоспряжений оператор; матриці спряженого та самоспряженого оператора, їх властивості; власні числа та власні елементи самоспряженого оператора, їх властивості, спектральне зображення самоспряженого оператора; зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.
6. Означення групи, підгрупи, кільця і поля. Приклади. Поняття фактор-групи.

Функціональний аналіз та інтегральні рівняння

1. Міра множин: означення та властивості; міра Лебега на прямій і в просторі \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.
2. Вимірні функції: означення, основні властивості.
3. Інтеграл Лебега: означення, основні властивості; теореми про граничний перехід під знаком інтеграла; простори L_p , $p \geq 1$.
4. Метричні простори: означення, приклади, повнота, сепарабельність; принцип нерухомої точки та його застосування.
5. Банахові і гільбертові простори: означення, приклади, властивості норми і скалярного добутку.
6. Лінійні неперервні функціонали і оператори; означення, властивості, норма; обернені оператори.
7. Компактні множини і КО в банахових просторах: означення, властивості; теореми Фредгольма для операторних рівнянь 2-го роду з КО.
8. Резольвента і спектр оператора: означення, властивості, спектр компактних і самоспряжених операторів.
9. Лінійні інтегральні рівняння: метод послідовних наближень для рівнянь Вольтерри і Фредгольма; теореми Фредгольма; теорема Гільберта – Шмідта для рівнянь з симетричним ядром.

10. Узагальнені функції: означення, приклади; диференціювання; перетворення Фур'є.

Аналітичні функції комплексної змінної

1. Означення та приклади аналітичних функцій.
2. Інтегральна теорема і формула Коші.
3. Розклад аналітичної функції в ряд Тейлора.
4. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Класифікація особливих точок.
5. Лишки: означення; основна теорема; обчислення інтегралів з допомогою лишків.

Звичайні диференціальні рівняння

1. Означення й основні поняття диференціальних рівнянь першого порядку. Простіші методи знаходження наближених розв'язків диференціальних рівнянь в нормальній формі.
2. Основні інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку.
3. Диференціальні рівняння вищих порядків: основні поняття; базові типи диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку.
4. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків: фундаментальна система розв'язків; структура загального розв'язку; методи Ейлера та Лагранжа інтегрування рівнянь; теорема про суперпозицію розв'язків неоднорідних рівнянь.
5. Нормальні системи диференціальних рівнянь: основні поняття; базові методи інтегрування. Розв'язування лінійних системи диференціальних рівнянь методом матрицанта.
6. Задача Коші для диференціальних рівнянь і систем: постановка; геометричний та механічний зміст; теореми про достатні умови коректної розв'язності.
7. Особливі точки та особливі розв'язки диференціальних рівнянь. Класифікація Пуанкаре.
8. Стійкість розв'язків нормальних систем диференціальних рівнянь: основні поняття, метод функції Ляпунова дослідження на стійкість за першим наближенням.
9. Крайові задачі для диференціальних рівнянь: теореми існування, інтегральне зображення розв'язку за допомогою функції Гріна; власні значення та власні функції однорідної крайової задачі для рівнянь Штурма-Ліувілля.

Рівняння з частинними похідними

1. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку: основні поняття; метод характеристик; структура загального розв'язку; постановка та розв'язність задачі Коші.
2. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку: основні поняття; класифікація; зведення до канонічної форми; інтегрування.
3. Задача Коші для лінійних рівнянь довільного порядку в класах аналітичних функцій: теорема Ковалевської; методом Хольмгрена встановлення єдиності розв'язку.
4. Класичні рівняння математичної фізики: рівняння коливних процесів; рівняння тепло-дифузійних процесів; рівняння стаціонарних процесів.
5. Основні задачі для рівнянь математичної фізики: задача Коші; крайові задачі; початково-крайові задачі; поняття про коректність; приклад Адамара.
6. Розв'язування базових задач математичної фізики: метод Фур'є; метод інтегральних перетворень; метод розкладу за власними функціями.
7. Параболічні системи рівнянь з частинними похідними: основні види означень; класи єдиності та коректності задачі Коші.
8. Гіперболічні системи рівнянь з частинними похідними: основні види означень; класи єдиності та коректності задачі Коші.
9. Поняття про коректні системи рівнянь з частинними похідними за Петровським та за Шиловим. Умови розв'язності задачі Коші.

Список літератури

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1 / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993. – 319 с.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.2 / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1994. – 302 с.
3. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 1. Метричні і нормовані простори / В.К. Маслюченко. – Чернівці: ЧНУ, 2010. — 184 с.
4. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 2. Лінійні оператори і функціонали / В.К. Маслюченко. – Чернівці: ЧНУ, 2010. — 191 с.
5. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 3. Гільбертові простори / В.К. Маслюченко. – Чернівці: ЧНУ, 2011. — 72 с.

6. Кривошия О.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння / О.А. Кривошия, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К.: Либідь, 2004. – 408 с.
7. Івасишен С.Д. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Г.П. Івасюк, Н.В. Рева. – Чернівці: Родовід, 2015. – 358 с.
8. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язування задач математичної фізики: навчальний посібник / Н.О. Вірченко. – Київ: КПІ, 1997. – 370 с.
9. Літовченко В.А. Системи Шилова у просторах типи S і S' : Монографія / В.А. Літовченко. – Чернівці: ЧНУ, 2019. – 280 с.
10. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, Ivasyshen, A.N. Kochubei. Birkh'auser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. 152)
11. Городецький В.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Курс лінійної алгебри в теоремах і задачах. Частина перша: Навчальний посібник.— Чернівці, 2018.— 336 с.
12. Лінійна алгебра. Контрольні питання та завдання для самостійної роботи. 1 семестр /Укл.: Р.С.Колісник, В.С.Сікора.— Чернівці: Книги – XXI, 2012.— 58 с.
13. Мельник Т. А. Комплексний аналіз : підручник. - К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. - 192 с.
14. Нагнибіда М. І. Основи комплексного аналізу.— Зелена Буковина, 2002. – 256 с

Критерії оцінювання вступного іспиту до аспірантури зі спеціальності 111 «Математика»

Вступний іспит відбувається стаціонарно і включає в себе усну відповідь на питання екзаменаційного білету.

Екзаменаційний білет складається з чотирьох теоретичних питань, які входять до різних розділів програми вступного іспиту.

Відповідь на кожне теоретичне питання оцінюється цілою кількістю балів, що не перевищує 25 балів.

За опис основної ідеї доведення твердження у відповіді на теоретичне питання ставиться оцінка до 15 балів.

За кожну незначну технічну помилку знімається до 1 балу.

За кожну грубу логічну чи обчислювальну помилку знімається до 3 балів.

Результатом складання іспиту є сума балів у межах 100-200 балів, яка одержується у результаті додавання п'яти доданків: 100 балів (початкова кількість балів) і чотирьох результатів відповідей на питання екзаменаційного білету.