

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Факультет математики та інформатики



ЗАТВЕРДЖЕНО

Голова приймальної комісії

Роман ПЕТРИШИН

_____ 2023 р.

ПРОГРАМА

додаткового вступного іспиту до аспірантури зі спеціальності
111 Математика

ЗАТВЕРДЖЕНО

Вченою радою факультету
математики та інформатики

Голова Вченої ради

_____ Ольга МАРТИНЮК

(протокол №5 від 28.12.2022 р.)

Математичний аналіз

1. Функції однієї змінної: границя функції в точці; дослідження локальної поведінки функції; неперервні функції та їх основні властивості. Обернена функція та умови її існування та неперервності. Властивості неперервних функцій на відрізку (теореми Вейєрштрасса, Больцано-Коші і Кантора).
2. Похідна та її застосування: означення та правила обчислення похідних; диференційовні функції, властивості диференційовних функцій (теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші); диференціал функції; похідні та диференціали вищих порядків; формула Тейлора; дослідження функцій на екстремум, проміжки опуклості функцій.
3. Невизначений інтеграл: означення, властивості, формули заміни змінної та інтегрування частинами, інтегрування раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій.
4. Визначений інтеграл: означення, основні властивості, критерій інтегровності, класи інтегровних функцій, застосування визначеного інтеграла до знаходження площ фігур, довжин кривих та об'ємів тіл.
5. Числові ряди: означення збіжності; критерій Коші; критерій та ознаки Коші та Даламбера збіжності рядів з невід'ємними членами; абсолютно і умовно збіжні ряди, ознаки Лейбніса, Діріхле та Абеля.
6. Функціональні ряди: означення, критерій та ознаки рівномірної збіжності; властивості рівномірно збіжних рядів; границя та неперервність суми ряду, почленне інтегрування та диференціювання; степеневі ряди та їх основні властивості, радіус збіжності і область збіжності степеневого ряду; розклад елементарних функцій у степеневі ряди.
7. Функції багатьох змінних: границя в точці; неперервність; властивості неперервних функцій на компактних і зв'язних множинах; частинні похідні, теорема про рівність мішаних похідних; диференційовність і її зв'язок з частинними похідними; формула Тейлора; дослідження на екстремум; градієнт, похідна за напрямом; теореми про існування і диференційовність неявної функції.
8. Невласні інтеграли: означення, властивості, ознаки збіжності; рівномірна збіжність невластних інтегралів, залежних від параметра; властивості функцій, що визначаються невластними інтегралами (границя, неперервність, диференціювання та інтегрування по параметру). Г-функція Ейлера та В-функція Ейлера та їх властивості.
9. Кратні інтеграли: означення, властивості, обчислення, зведення кратних інтегралів до повторних; невластні кратні інтеграли.

10. Криволінійні та поверхневі інтеграли: означення, властивості, обчислення; формули Гріна, Гауса-Остроградського і Стокса.
11. Ряди та інтеграл Фур'є: означення, властивості рядів Фур'є відносно ортонормованих систем функцій; ознаки збіжності тригонометричних рядів Фур'є; розклад функцій в тригонометричні ряди Фур'є; інтегральна формула Фур'є, перетворення Фур'є.

Лінійна алгебра

1. Визначники та їх властивості. Алгебраїчні доповнення і теорема про розклад визначника. Мінори та їх зв'язок з алгебраїчними доповненнями.
2. Матриці, дії над матрицями, ранг матриці, обернена матриця та її обчислення.
3. Лінійні простори: означення, лінійна незалежність векторів, базис, розмірність; евклідові та унітарні скінченновимірні простори; приклади.
4. Лінійні оператори у скінченновимірних просторах: означення, матричний опис; ядро і образ, ранг і дефект; простір лінійних операторів.
5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: необхідна та достатня умова розв'язності (теорема Кронекера - Капеллі); теорема про структуру розв'язків.
6. Канонічна форма матриці лінійного оператора: жорданова форма матриці; знаходження функцій від оператора; теорема Гамільтона – Келі.
7. Спектральна теорія самоспряжених операторів: білінійна та квадратична форми оператора; теорема про існування спряженого оператора; самоспряжений оператор; матриці спряженого та самоспряженого оператора, їх властивості; власні числа та власні елементи самоспряженого оператора, їх властивості, спектральне зображення самоспряженого оператора; зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.
8. Означення групи, підгрупи, кільця і поля. Приклади. Поняття фактор-групи.

Функціональний аналіз та інтегральні рівняння

1. Міра множин: означення та властивості; міра Лебега на прямій і в просторі R^n , $n \geq 2$.
2. Вимірні функції: означення, основні властивості.

3. Інтеграл Лебега: означення, основні властивості; теореми про граничний перехід під знаком інтеграла; простори L_p , $p \geq 1$.
4. Метричні простори: означення, приклади, повнота, сепарабельність; принцип нерухомої точки та його застосування.
5. Банахові і гільбертові простори: означення, приклади, властивості норми і скалярного добутку.
6. Лінійні неперервні функціонали і оператори; означення, властивості, норма; обернені оператори.
7. Компактні множини і КО в банахових просторах: означення, властивості; теореми Фредгольма для операторних рівнянь 2-го роду з КО.
8. Резольвента і спектр оператора: означення, властивості, спектр компактних і самоспряжених операторів.
9. Лінійні інтегральні рівняння: метод послідовних наближень для рівнянь Вольтерри і Фредгольма; теореми Фредгольма; теорема Гільберта – Шмідта для рівнянь з симетричним ядром.
10. Узагальнені функції: означення, приклади; диференціювання; перетворення Фур'є.

Аналітичні функції комплексної змінної

1. Означення та приклади аналітичних функцій.
2. Інтегральна теорема і формула Коші.
3. Розклад аналітичної функції в ряд Тейлора.
4. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Класифікація особливих точок.
5. Лишки: означення; основна теорема; обчислення інтегралів з допомогою лишків.

Звичайні диференціальні рівняння

1. Означення й основні поняття диференціальних рівнянь першого порядку. Простіші методи знаходження наближених розв'язків диференціальних рівнянь в нормальній формі.
2. Основні інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку.
3. Диференціальні рівняння вищих порядків: основні поняття; базові типи диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку.
4. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків: фундаментальна система розв'язків; структура загального розв'язку; методи Ейлера та Лагранжа інтегрування рівнянь; теорема про суперпозицію розв'язків неоднорідних рівнянь.

5. Нормальні системи диференціальних рівнянь: основні поняття; базові методи інтегрування. Розв'язування лінійних системи диференціальних рівнянь методом матрицанта.
6. Задача Коші для диференціальних рівнянь і систем: постановка; геометричний та механічний зміст; теореми про достатні умови коректної розв'язності.
7. Особливі точки та особливі розв'язки диференціальних рівнянь. Класифікація Пуанкаре.
8. Стійкість розв'язків нормальних систем диференціальних рівнянь: основні поняття, метод функції Ляпунова дослідження на стійкість за першим наближенням.
9. Крайові задачі для диференціальних рівнянь: теореми існування, інтегральне зображення розв'язку за допомогою функції Гріна; власні значення та власні функції однорідної крайової задачі для рівнянь Штурма-Ліувілля.

Рівняння з частинними похідними

1. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку: основні поняття; метод характеристик; структура загального розв'язку; постановка та розв'язність задачі Коші.
2. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку: основні поняття; класифікація; зведення до канонічної форми; інтегрування.
3. Задача Коші для лінійних рівнянь довільного порядку в класах аналітичних функцій: теорема Ковалевської; методом Хольмгрена встановлення єдиності розв'язку.
4. Класичні рівняння математичної фізики: рівняння коливних процесів; рівняння тепло-дифузійних процесів; рівняння стаціонарних процесів.
5. Основні задачі для рівнянь математичної фізики: задача Коші; крайові задачі; початково-крайові задачі; поняття про коректність; приклад Адамара.
6. Розв'язування базових задач математичної фізики: метод Фур'є; метод інтегральних перетворень; метод розкладу за власними функціями.
7. Параболічні системи рівнянь з частинними похідними: основні види означень; класи єдиності та коректності задачі Коші.
8. Гіперболічні системи рівнянь з частинними похідними: основні види означень; класи єдиності та коректності задачі Коші.

9. Поняття про коректні системи рівнянь з частинними похідними за Петровським та за Шиловим. Умови розв'язності задачі Коші.

Загальна топологія

1. Аксиоми топологічної структури. Означення топології та топологічного простору. Замкнені і відкриті множини. Характеризація відкритих підмножин числової прямої.
2. Внутрішні точки і точки дотику. Внутрішність множини та її властивості. Замикання множини та його властивості. Властивості оператора замикання. Зв'язок між замиканням і внутрішністю. Властивості оператора внутрішності
3. Аксиоми відокремності: $T_1, T_2, T_3, T_{3.5}, T_4$. Гаусдорфовість і нормальність метричного простору. Лема Урисона.
4. Множини типу F_σ і G_δ . Функціонально відкриті і функціонально замкнені множини. Досконало нормальні простори і теорема Веденісова

Список літератури

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1 / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993. – 319 с.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.2 / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1994. – 302 с.
3. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 1. Метричні і нормовані простори / В.К. Маслюченко. – Чернівці: ЧНУ, 2010. — 184 с.
4. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 2. Лінійні оператори і функціонали / В.К. Маслюченко. – Чернівці: ЧНУ, 2010. — 191 с.
5. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 3. Гільбертові простори / В.К. Маслюченко. – Чернівці: ЧНУ, 2011. — 72 с.
6. Кривошия О.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння / О.А. Кривошия, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К.: Либідь, 2004. – 408 с.
7. Івасишен С.Д. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Г.П. Івасюк, Н.В. Рева. – Чернівці: Родовід, 2015. – 358 с.

8. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язування задач математичної фізики: навчальний посібник / Н.О. Вірченко. – Київ: КПІ, 1997. – 370 с.
9. Літовченко В.А. Системи Шилова у просторах типу S і S' : Монографія / В.А. Літовченко. – Чернівці: ЧНУ, 2019. – 280 с.
10. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, Ivasyshen, A.N. Kochubei. Birkh'auser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. 152)
11. Городецький В.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Курс лінійної алгебри в теоремах і задачах. Частина перша: Навчальний посібник. — Чернівці, 2018. — 336 с.
12. Лінійна алгебра. Контрольні питання та завдання для самостійної роботи. 1 семестр /Укл.: Р.С.Колісник, В.С.Сікора.— Чернівці: Книги – XXI, 2012.— 58 с.
13. Мельник Т. А. Комплексний аналіз : підручник. - К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. - 192 с.
14. Нагнибіда М. І. Основи комплексного аналізу.— Зелена Буковина, 2002. – 256 с
15. Гуран І.Й., Зарічний М.М. Диференціальна геометрія і топологія. — К., НМК ВО, 1991.

Критерії оцінювання додаткового вступного випробування при вступі до аспірантури зі спеціальності 111 «Математика»

Вступне випробування відбувається стаціонарно і включає в себе усну відповідь на чотири теоретичних питання, які входять до різних розділів програми вступного випробування.

Відповідь на кожне теоретичне питання оцінюється цілою кількістю балів, що не перевищує 25 балів.

За опис основної ідеї доведення твердження у відповіді на теоретичне питання ставиться оцінка до 15 балів.

За кожну незначну технічну помилку знімається до 1 балу.

За кожну грубу логічну чи обчислювальну помилку знімається до 3 балів.

Результатом складання іспиту є сума балів у межах 100-200 балів, яка одержується у результаті додавання п'яти доданків: 100 балів (початкова кількість балів) і чотирьох результатів відповідей на питання екзаменаційного білету. Якщо одержана сума не перевищує 120 балів, то результат складання іспиту є негативним, тобто вступник одержує оцінку «незараховано». Якщо одержана сума перевищує 120 балів, то вступник одержує оцінку «зараховано».